

Eine Verallgemeinerung
ordnungsgeometrischer Sätze
über Kurven

(A u s z u g)

Inauguraldissertation
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Georg S c h m e r l e r
aus Fürth/Bayern

Druck: Omnia - Drucke H. Müller K.G., Nürnberg - 1957

Als Dissertation genehmigt
von der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen



Tag der mündlichen Prüfung: 20. Februar 1957
Dekan: Universitätsprofessor Dr. Th. Schneider
Berichterstatter : Universitätsprofessor Dr. O. Haupt
Berichterstatter : Universitätsprofessor Dr. G. Nöbeling

In der Theorie vieler Juelscher Probleme für Kurven (vgl. z.B. (1) S.62 ff.) sind wichtige Hilfsmittel der sogenannte Reduktionssatz (vgl.(3) S.142 ff) und der Kontraktionssatz (vgl. (2) S.27 ff). Diese Sätze sind Spezialfälle von Sätzen über Korrespondenzen, d.h. über Abbildungen aus dem k -fachen Produkt der Strecke E in ein Produkt von im allgemeinen abzählbar vielen Faktoren E (vgl. (4), (5)). Für den Fall seiner Betrachtungen über ebene Kurven 3. Ordnung hat bereits Juel (11) hervorgehoben, daß es sich um Sätze über Korrespondenzen handelt. Später hat sich mit solchen Korrespondenzen unter anderen M. Linsman (12) beschäftigt; ferner sind Verallgemeinerungen des Juel-Stenforsschen Satzes sowie Kennzeichnungen von Bogen minimalen Ordnungswertes auf Sätze über Korrespondenzen zurückgeführt worden (vgl. (4), (5)). Dagegen sind weder der Reduktionssatz noch der Kontraktionssatz bisher hinsichtlich ihrer Voraussetzungen und Beweisführungen im einzelnen untersucht worden.

Eine derartige Untersuchung und die daraus zu gewinnende Verallgemeinerung des Reduktions- bzw. Kontraktionssatzes ist Ziel des ersten Teiles (§ 1 und § 2) vorliegender Arbeit. Dabei werden die Voraussetzungen gegenüber (3) bzw. (2) erheblich abgeschwächt, eine wesentlich andere Beweisanordnung gefunden und Ergänzungen des Kontraktionssatzes, die z.B. in (3) § 2 benötigt werden, mit einbezogen.

Im zweiten Teil werden die so erhaltenen Begriffsbildungen und Sätze über Korrespondenzen benutzt, um die früher für verallgemeinerte Kegelschnitte formulierten und bewiesenen Sätze von Böhmer, Mohrmann und Mukhopadhyaya (vgl. (3)) zu Sätzen über Korrespondenzen zu erweitern und damit ihren Kern herauszuschälen. Dabei wird sich noch eine bisher - wie es scheint - nicht bemerkte Ausdehnung der (bislang lediglich für (geschlossene) Kurven ausgesprochenen) Sätze von Böhmer und Mukhopadhyaya auf (nicht geschlossene) Bogen ergeben; dagegen erweist

sich eine entsprechende Ausdehnung des Mohrmannschen Satzes (von Bogen) auf Kurven als nicht möglich.

Schließlich wird im dritten Teil gezeigt, daß die so erhaltenen Sätze über Korrespondenzen die entsprechenden Sätze über Kurven tatsächlich als Spezialfälle umfassen.

Teil I.

An einem einfachen Beispiel sei vorab in Kürze erläutert, was unter einem Kontraktions- bzw. Reduktionssatz zu verstehen ist. Es sei $\mathcal{K}$ ein orientierter, ebener Konvexbogen und $\mathcal{C}$ das System aller Kreise $\mathcal{C}$, die mit $\mathcal{K}$ mindestens 4 aber je nur endlich viele Punkte gemeinsam haben. ($\mathcal{C}$ nicht leer). Sind $X_1, X_2, \dots, X_n$ die entsprechend der Orientierung von $\mathcal{K}$ geordneten Punkte von $\mathcal{V} = \mathcal{K} \cap \mathcal{C}$, so ist $\mathcal{V}$ durch je 3 der X_i eindeutig bestimmt, womit eine Korrespondenz von $\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ auf $\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \dots$ gegeben ist. Hält man nun 2 Punkte von $\mathcal{V}$, etwa X_1, X_2 , fest, bewegt man ferner etwa X_3 monoton auf $\mathcal{K}$ z.B. gegen X_4 , so bewegen sich allgemein X_{2t+1} und X_{2t+2} monoton gegeneinander und die X_{2t+1} alle in der gleichen Richtung (Monotonieeigenschaft der Korrespondenz). Durch diese Monotonieeigenschaft wird die Vermutung nahegelegt, daß durch eine geeignete Folge solcher "monotoner Änderungen" z.B. die $X_1, \dots, X_n$ einander beliebig nahe gebracht werden können. Der Beweis dieser Vermutung liefert den Kontraktionssatz (für den vorliegenden Fall also die Existenz mindestens eines Scheitels auf $\mathcal{K}$). Nehmen wir an, daß $\mathcal{K}$ mit jedem Kreis maximal 4 Punkte gemeinsam hat. Den 4-tupeln $X_1^{(\mu)}, \dots, X_4^{(\mu)}$, $\mu = 1, 2, \dots$, die gemäß dem Kontraktionssatz für $\mu \rightarrow \infty$ gegen einen Punkt Y von $\mathcal{K}$ konvergieren, entsprechen Kreise, die außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von Y für hinreichend großes μ ganz auf der einen oder anderen Seite von $\mathcal{K}$ liegen. Zwecks Unterscheidung dieser beiden Möglichkeiten kann man den 4-tupeln ein Vorzeichen (+ oder -) zu-

ordnen und die Behauptung des Kontraktionssatzes dahin verschärfen, daß die 4-tupel $X_1^{(u)}, \dots, X_4^{(u)}$ alle das gleiche Vorzeichen besitzen. - Ist $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \mathcal{D}$ mindestens 4-punktig und enthält $\mathcal{D}$ auch Stützpunkte von $\mathcal{C}$ mit $\mathcal{B}$, so erhebt sich die Frage nach der Existenz von zu $\mathcal{C}$ beliebig benachbarten Kreisen $\mathcal{C}'$ derart, daß $\mathcal{D}' = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}'$ nur Schnittpunkte enthält und zwar mindestens vier. Die bejahende Beantwortung dieser Frage liefert den Reduktionssatz für den vorliegenden Fall.

Nach dieser Motivierung der Fragestellung geben wir jetzt die zu Formulierung und Beweis für unseren allgemeinen Kontraktions- und Reduktionssatz bei Korrespondenzen verwendeten Begriffe und Postulate.

§ 1 Stetige, monotone Korrespondenzen.

1.1. Bezeichnungen.

- 1.1.1. Unsere Betrachtungen beziehen sich im folgenden auf entweder: die (abgeschlossene) Einheitsstrecke $0 \leq x \leq 1$ auf der reellen Zahlengeraden (die sog. "Grundstrecke $\mathcal{T}$ ") oder: die Kreisperipherie vom Umfang 1, den sog. "Grundkreis $\mathcal{L}$ ".

Sollen sowohl Grundstrecke als auch Grundkreis betrachtet werden, so sprechen wir von "Grundbogen $\mathcal{M}$ ".

Anmerkung: Der Fall des Grundkreises kommt nur für den 2. Teil in Betracht.

Der Grundbogen $\mathcal{M}$ ist mit einem Durchlaufungssinn (Orientierung) versehen (der im Falle $\mathcal{M} = \mathcal{T}$ der Anordnung der reellen Zahlen auf $\mathcal{T}$ entsprechen möge).

- a) Ist $\mathcal{M} = \mathcal{T}$ und $X_0, X_1 \in \mathcal{T}$ (mit $X_0 \neq X_1$), so schreiben wir $X_0 < X_1$, wenn X_0 dem X_1 im Sinne der Orientierung von $\mathcal{T}$ vorangeht. Unter $\|X_0, X_1\|$ sei der Abstand von X_0 und X_1 auf $\mathcal{T}$ verstanden.
- b) Ist $\mathcal{M} = \mathcal{L}$ und $\mathcal{T}$ echter Teilbogen von $\mathcal{L}$, so wird durch die Orientierung von $\mathcal{L}$ auf $\mathcal{T}$ (eindeutig) eine Orientierung induziert. Ist dann $X_0, X_1 \in \mathcal{T}$, so ist $X_0 < X_1$ und $\|X_0, X_1\|$

bezüglich γ gemäß a) erklärt. Sofern (wie das später stets der Fall sein wird) keine Mißverständnisse zu befürchten sind, lassen wir den Zusatz "bezüglich γ " auch weg.

Schließlich bedeutet $X_0 < X_1$ (für $\mathcal{M} = \mathcal{I}$ und $\mathcal{M} = \mathcal{L}$), daß X im Innern desjenigen, durch X_0 und X_1 begrenzten Teilbogens von $\mathcal{M}$ liegt, der im Sinne der Orientierung von $\mathcal{M}$ von X_0 nach X_1 durchlaufen wird.

Ist $X_0 < X_1$ (bezüglich γ), so sagen wir auch, es liege X_0 links oder unterhalb von X_1 , hingegen X_1 rechts oder oberhalb von X_0 (bezüglich γ).

1.1.2. Für jeden (echten oder unechten) Teilbogen γ von $\mathcal{M} = \mathcal{I}$ bzw. $\mathcal{M} = \mathcal{L}$ wird mit $\bar{\gamma}$ bzw. $\underline{\gamma}$ bezeichnet die abgeschlossene Hülle bzw. der offene Kern von γ bezüglich der Zahlgeraden oder bezüglich $\mathcal{L}$.

Ist $P < Q$ (bezüglich γ), so wird mit (P, Q) bezeichnet der offene (Kern des) von P und Q begrenzte(n) Teilbogen(s) (von γ).

Ein endliches oder abzählbar unendliches System $(P_1, P_2, \dots)$ von Punkten $P_v \in \gamma$ heiße natürlich (an)geordnet auf $\mathcal{M}$ (bezüglich γ), wenn $P_v < P_{v+1}$ (bezüglich γ), $v \geq 1$. Es sollen dann $P_1, \dots, P_m$ die m kleinsten oder untersten Punkte von $(P_1, P_2, \dots)$ genannt werden und $\|P_1 P_m\|$ (bezüglich γ) die Spannweite des m-tupels der $P_1, \dots, P_m$.

Als System $\mathcal{N}(P)$ von Umgebungen U des Punktes $P \in \mathcal{M}$ benutzen wir das System aller P enthaltenden, in $\mathcal{M}$ offenen Teilbögen von $\mathcal{M}$. Durchmesser einer Umgebung U sei der Abstand ihrer Endpunkte (bezüglich U).

1.2. Definition der k-Korrespondenz .

Es sei $k \geq 1$ eine feste, natürliche Zahl, die sog. "Grundzahl". Unter einer k -Korrespondenz (auf dem Grundbogen $\mathcal{M}$) verstehen wir eine (im allgemeinen mehrdeutige) Abbildung $h = h(X_1, \dots, X_k)$ aus $\mathcal{M}^k = \mathcal{M} \times \dots \times \mathcal{M}$ in $\mathcal{M}$, wobei die $X_k \in \mathcal{M}$ ($k = 1, 2, \dots, k$) alle verschieden sind; ferner sollen die "Werte" $Y, Z, \dots$ von $h(X_1, \dots, X_k)$ von den X_k verschieden sein. h ist also gegeben durch eine Menge $\mathcal{M}^k$ von sog. "Komplexen" $\mathcal{M}^k$, d.h. von Systemen $\mathcal{M}^k = (X_1, \dots, X_k, Y, Z, \dots)$, zu denen wir auch noch die aus k Punkten bestehenden Systeme $(X'_1, \dots, X'_k)$ mit $X'_k \in \mathcal{M}$ rechnen wol-

len. Diese Komplexe enthalten mindestens k , eventuell auch unendlich viele Punkte.

Von einem System m^k der eben definierten Art wollen wir sagen, daß es "(gemäß §1.2.) auf $\mathcal{M}$ definiert" ist.

1.3. Existenz- und Eindeutigkeitspostulate .

Das in § 1.2. definierte System m^k soll bei festem k folgenden Postulaten genügen :

Postulat 1 :

- A) Jeder Komplex $a^k \in m^k$ enthält mindestens k in $\mathcal{M}$ gelegene Punkte.
- B) Jedes a^k ist durch irgend k seiner Punkte eindeutig bestimmt.
- C) Irgend k Punkte aus $\mathcal{M}$ bestimmen ein System m^k .
- D) Es gibt keine Punkte von $\mathcal{M}$, die allen $a^k \in m^k$ angehören.
(M.a.W. Sogenannte Grundpunkte sollen nicht vorhanden sein.)

Anmerkungen : 1) Soweit keine Mißverständnisse zu befürchten sind, wollen wir a und m für a^k und m^k schreiben.

2) Ist $\mathcal{I}$ ein abgeschlossener oder offener Teilbogen von $\mathcal{M}$, so sei mit $a\mathcal{I}$ die Menge der in $\mathcal{I}$ gelegenen Punkte von a bezeichnet.

Postulat 2 :

Jedes $a \in m$ ist eine in $\mathcal{M}$ abgeschlossene und nirgendsdichte Menge.

1.4. Ordnungswert .

Ist a ein System aus m und P eine (abgeschlossene oder offene) Teilmenge $\subset \mathcal{M}$, so sei mit $O(aP)$ die Anzahl der Punkte des Durchschnittes aP bezeichnet, sofern diese Anzahl endlich ist. Anderenfalls sei $O(aP) = \infty$. In beiden Fällen heiße $O(aP)$ "Ordnungswert des Komplexes a in P ".

1.5. Stetigkeit .

Bezeichnung : Gegeben sei ein Komplex $a \in m$. $X_1, \dots, X_k$ seien k beliebige Punkte von $a\mathcal{M}$, ferner $U_1, \dots, U_k$ paarweise fremde, im übrigen beliebige Umgebungen dieser Punkte.

$X_1, \dots, X_k$. Je k beliebige Punkte $X_k' \in U_k$ ($k = 1, \dots, k$) bestimmen nach Postulat 1B und 1C eindeutig je einen Komplex $\mathcal{L} \in \mathcal{M}$. Wir wollen sagen, daß alle diese Komplexe $\mathcal{L}$ zu einer "Umgebung von α bezüglich $X_1, \dots, X_k$ " kurz : zu einer " $(X_1, \dots, X_k)$ -Umgebung $\mathcal{U}(\alpha)$ von α " gehören.

Nunmehr können wir das nächste Postulat wie folgt aussprechen:

Postulat 3

Stetigkeitspostulat

Ist $\alpha \in \mathcal{M}$ (wobei $\mathcal{M}$ den Postulaten 1 und 2 genüge) und $\mathcal{P}$ ein Teilbogen von $\mathcal{M}$ mit $0(\alpha \mathcal{P}) \geq k$, so gibt es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $\mathcal{L}$ von $\mathcal{P}$ mit $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}} \subset \mathcal{P}$ und zu je k beliebigen Punkten $X_1, \dots, X_k \in \alpha \mathcal{P}$ eine $(X_1, \dots, X_k)$ -Umgebung $\mathcal{U}(\alpha)$ von α derart, daß für jedes $\mathcal{L} \in \mathcal{U}(\alpha)$ gilt:
 $\mathcal{L} \mathcal{P} \subset \mathcal{P} - \mathcal{L}$.

Bezeichnung: Ist E eine Eigenschaft und α ein Komplex von $\mathcal{M}$, so soll die Redeweise "zu α gibt es beliebig benachbarte $\mathcal{L}$, die die Eigenschaft E besitzen," folgendes bedeuten : Es gibt (mindestens) ein k -tupel von Punkten $X_1, \dots, X_k \in \alpha \mathcal{M}$ derart, daß zu jeder $(X_1, \dots, X_k)$ -Umgebung $\mathcal{U}(\alpha)$ Komplexe $\mathcal{L} \in \mathcal{U}(\alpha)$ mit der Eigenschaft E existieren.

1.6. Definition der S- und T-Punkte.

Entsprechend den Schnitt- und Stützpunkten wie sie z.B. im Durchschnitt eines Kreises mit einem Konvexbogen auftreten können, unterscheiden wir bei Komplexen S- und T-Punkte.

Es sei $0(\alpha \mathcal{M}) \geq k+1$ und es seien die Postulate 1-3 erfüllt.

- A) Dann soll $S \in \alpha \mathcal{M}$ als S-Punkt in α bezeichnet werden, wenn folgendes gilt: Zu je k beliebigen Punkten $X_1, \dots, X_k \in \alpha \mathcal{M}$, die von S und untereinander verschieden sind, und zu beliebig kleiner Umgebung $U(S)$ von S gibt es eine Umgebung $V(X_1) = V(X_1, U(S), X_2, \dots, X_k)$ von X_1 derart, daß für jeden durch $X_2, \dots, X_k$ sowie durch einen beliebigen Punkt $X \in V(X_1)$ bestimmten Komplex $\mathcal{L}$ gilt : $\mathcal{L} U(S) \neq \emptyset$.

- B) Jeder Nicht-S-Punkt in α soll T-Punkt in α genannt werden.

Bezeichnung : Ist $\mathcal{T}$ ein Teilbogen des Grundbogens $\mathcal{M}$ und α ein Komplex von $\mathcal{M}$, so werden wir für "S ist ein im Teilbogen $\mathcal{T}$ gelegener S-Punkt in α " im folgenden des öfteren die kürzere Schreibweise "S ist ein S-Punkt in $\alpha \mathcal{T}$ " verwenden.

1.7. Reduktionssatz

1.7.1. Das folgende Postulat 4 enthält - grob gesprochen - die Forderung, daß bei jeder hinreichend kleinen Änderung von α ein S-Punkt wieder einen S-Punkt liefert, bei geeigneter, beliebig kleiner Änderung hingegen ein T-Punkt mindestens 2 S-Punkte.

Postulat 4

Reduktionspostulat

Es sei $\mathcal{M}$ ein gemäß § 1.2. auf $\mathcal{M}$ definiertes System, das den Postulaten 1 - 3 genüge.

A) Ist $S \in \alpha \mathcal{T}$ ein S-Punkt in α , wobei $\mathcal{T} = \mathcal{T} \subset \mathcal{M}$ mit $O(\alpha \mathcal{T}) \geq k+1$ (also eventuell $\mathcal{T} = \mathcal{M}$), so soll gelten: Zu je k beliebigen, untereinander und von S verschiedenen Punkten aus $\alpha \mathcal{T}$, die mit $X_1, \dots, X_k$ bezeichnet werden sollen, sowie zu beliebig kleiner Umgebung $U(S) \subset \mathcal{T}$ von S gibt es eine $(X_1, \dots, X_k)$ - Umgebung $\mathcal{N} = \mathcal{N}(X_1, \dots, X_k, U(S))$ des Komplexes α derart, daß alle $\beta \in \mathcal{N}$ mit $U(S)$ mindestens einen S-Punkt in β gemeinsam haben.

B) Ist $T \in \alpha \mathcal{T}$ ein T-Punkt in α , wobei $\mathcal{T} = \mathcal{T} \subset \mathcal{M}$ mit $O(\alpha \mathcal{T}) \geq k+1$, so sei gefordert: Wählt man $k-1$ (untereinander und von T verschiedene) beliebige Punkte $Z_1, \dots, Z_{k-1}$ von $\alpha \mathcal{T}$ aus, so gibt es zu beliebig kleiner Umgebung $U(T) \subset \mathcal{T}$ von T eine Umgebung $V(T) = V(T, U(T), Z_1, \dots, Z_{k-1}) \subset U(T)$ des Punktes T derart, daß der durch die $k-1$ Punkte $Z_1, \dots, Z_{k-1}$ und einen beliebigen Punkt $P \in V(T)$ mit $P \neq T$ bestimmte Komplex $\beta \in \mathcal{M}$ mit $U(T)$ mindestens 2 S-Punkte in β gemeinsam hat.

Anmerkung: Falls die Grundzahl $k=1$ ist, entfallen die $Z_1, \dots, Z_{k-1}$.

C) Für Systeme $\mathcal{M}^k$ mit der Grundzahl $k \geq 2$ sei verlangt: Ist $T \in \alpha \mathcal{T}$ ein T-Punkt in α (wobei $\mathcal{T} = \mathcal{T} \subset \mathcal{M}$ mit $O(\alpha \mathcal{T}) \geq k+1$) und $U(T) \subset \mathcal{T}$ eine beliebige Umgebung von T , sind weiter P sowie $X_1, \dots, X_{k-2}$ irgendwelche Punkte von $\alpha \mathcal{T}$, die von T und untereinander verschieden sind, so existiert eine Umgebung $U(P) = U(P, U(T), X_1, \dots, X_{k-2}) \subset \mathcal{T}$ des Punktes P derart, daß bei beliebiger Wahl eines Punktes $P' \in U(P)$ für den durch $T, X_1, \dots, X_{k-2}$ sowie P' bestimmten Komplex β der festgehaltene Punkt T mindestens dann (wieder) ein T-Punkt in β ist, wenn β in $U(T)$ nur einen Punkt (nämlich T) besitzt.

1.7.2. Reduktionssatz .

- Vor. 1) Es sei $\mathcal{M}$ ein Grundbogen : Auf $\mathcal{M}$ sei nach § 1.2. ein System $\mathcal{M} = \mathcal{M}^k$ definiert, das den Postulaten 1-4 genügt und die Grundzahl $k \geq 1$ besitzt.
- 2) Es sei ein Komplex $a \in \mathcal{M}$ gegeben, sowie ein (abgeschlossener oder offener) Teilbogen $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}$, für den $O(a\mathcal{T}) \geq k+1$.
- 3) Alle Komplexe, die einer gegebenen, festen Nachbarschaft $\mathcal{N}$ von a angehören, besitzen nur endlich viele S-Punkte, dürfen aber eventuell unendlich viele T-Punkte aufweisen.

Behauptet wird - kurz gesagt - :

Es gibt zu a (mit $O(a\mathcal{T}) \geq k+q$) beliebig benachbarte $b \in \mathcal{M}$ mit $O(b\mathcal{T}) \geq k+q$, die keine T-Punkte sondern nur (endlich viele) S-Punkte und zwar mindestens so viele S-Punkte besitzen, wie a mit $\mathcal{T}$ gemeinsam hat. Falls $\mathcal{M}$ die Grundzahl $k=1$ besitzt, ist hierbei $q=1$ zu wählen; für $k \geq 2$ kann $q=1$ oder $q=2$ gesetzt werden.

1.8. Postulat 5 Monotoniepostulat

5A Es sei a ein Komplex aus $\mathcal{M}$ (wobei $\mathcal{M}$ den Postulaten 1-4 genüge) und $\mathcal{T}$ ein offener Teilbogen des Grundbogens $\mathcal{M}$ mit $O(a\mathcal{T}) \geq k+1$. a besitze in $\mathcal{T}$ endlich viele S-Punkte und zwar mindestens k , etwa $X_1, \dots, X_t$ ($\infty > t \geq k$). Hierbei seien die $X_1, \dots, X_t$ natürlich angeordnet. $U_v = U(X_v) \subset \mathcal{T}$ seien paarweise fremde Umgebungen der X_v ($v=1, \dots, t$). $t_1, \dots, t_{k-1}, r$ seien k beliebige, aber nicht notwendig natürlich geordnete Zahlen unter den Zahlen $1, \dots, t$. Hält man $X_{t_1}, \dots, X_{t_{k-1}}$ fest, so gibt es - wie aus dem Reduktionssatz (§ 1.7.2.) folgt - Umgebungen $W_r \subset U_r$ des Punktes X_r derart, daß bei beliebiger Wahl eines Punktes $Y \in W_r$ das durch Y sowie $X_{t_1}, \dots, X_{t_{k-1}}$ bestimmte $\mathcal{N} \in \mathcal{M}$ mit allen U_τ ($\tau=1, \dots, t$; $\tau \neq r$; $\tau \neq t_k$; $k=1, \dots, k-1$) je mindestens einen S-Punkt in $\mathcal{N}$ gemeinsam hat.

Wir fordern nun, daß es unter diesen W_r mindestens eine Umgebung $V_r (\subset U_r)$ von folgender Art gibt : Wählt man in V_r einen Punkt X'_r beliebig, bezeichnet mit $b \in \mathcal{M}$ den Komplex, der durch X'_r sowie $X_{t_1}, \dots, X_{t_{k-1}}$ bestimmt ist und nach obigem

mit allen U_τ ($\tau=1, \dots, t$; $\tau \neq r; \tau \neq t_k; k=1, \dots, k-1$) mindestens je einen S-Punkt in $\mathcal{L}$ gemeinsam hat, und bezeichnet man diese in U_τ liegenden S-Punkte kurz mit X'_τ , so soll für diese X'_τ gelten :

- α) Liegt zwischen X_r und X_τ keine oder eine gerade Anzahl von S-Punkten aus $\mathcal{M}\mathcal{T}$, die verschieden sind von den "festen" Punkten $X_{t_1}, \dots, X_{t_{k-1}}$, und liegt $X'_r \in V_r$ zwischen X_r und X_τ , dann liegen auch alle X'_τ zwischen X_r und X_τ ; liegt aber X'_r nicht zwischen X_r und X_τ , dann auch kein X'_τ .
- β) Liegt jedoch zwischen X_r und X_τ eine ungerade Anzahl von S-Punkten aus $\mathcal{M}\mathcal{T}$, die verschieden von $X_{t_1}, \dots, X_{t_{k-1}}$ sind, und ist $X'_r \in V_r$ zwischen X_r und X_τ gewählt worden, so befindet sich kein X'_τ zwischen X_r und X_τ ; wurde aber X'_r nicht zwischen X_r und X_τ gewählt, so liegen alle X'_τ zwischen X_r und X_τ .

Bezeichnungen :

- 1) Von einem Komplex $\mathcal{L}$ der oben beschriebenen Art wollen wir sagen, daß er "aus $\mathcal{M}$ durch monotone Änderung entstanden ist".
- 2) Alle S-Punkte von $\mathcal{M}\mathcal{T}$, die von den "festen", d.h. den nach Postulat 5A festgehaltenen Punkten $X_{t_1}, \dots, X_{t_{k-1}}$ verschieden sind, sollen "beweglich" genannt werden.

Postulat 5 B =====

Es sei $\mathcal{M}$ in $\mathcal{T}$ von endlichem Ordnungswert und für $\mathcal{M}\mathcal{T}$ gelte das Postulat 5 A. Dann soll - kurz gesagt - bei monotoner Änderung von X_r die zugehörige Änderung von $\mathcal{M}\mathcal{T}$ monoton sein im Sinne von Postulat 5 A jedenfalls solange, als im Verlaufe der Änderung die Ordnungswerte der auftretenden Komplexe (in $\mathcal{T}$) endlich bleiben und nicht abnehmen. Zugelassen ist dabei aber, daß beim Beginn des Prozesses T-Punkte von $\mathcal{M}\mathcal{T}$ verloren gehen.

Genauer : Es sei $\mathcal{M}\mathcal{T}$ von endlichem Ordnungswert und für $\mathcal{M}\mathcal{T}$ gelte Postulat 5A. Für beliebige $t_1, \dots, t_{k-1}, r$ (vgl. Postulat 5A) soll es ein zu X_r gehöriges V_r geben von folgender Beschaffenheit : Sind $\mathcal{L}'_r$ bzw. $\mathcal{L}''_r$ die durch $X'_r \in V_r$ bzw. $X''_r \in V_r$ zusammen mit $X_{t_1}, \dots, X_{t_{k-1}}$ bestimmten Komplexe und ist etwa $X_r < X'_r < X''_r$, so ist $0(\mathcal{L}'_r\mathcal{T}) \leq 0(\mathcal{L}''_r\mathcal{T}) < +\infty$. Ist ferner $\bar{X}$ der

durch X_r'' von X_r (auf $\mathcal{T}$) getrennte Endpunkt von V_r , so ist der Ordnungswert des durch $\bar{X}, X_{t_1}, \dots, X_{t_{k-1}}$ bestimmten Komplexes in $\mathcal{T}$ entweder unendlich oder kleiner als $0(\mathcal{S}_r''\mathcal{T})$ für alle zu $\bar{X}$ hinreichend benachbarten $X_r'' \in V_r$. Zugelassen ist, daß T-Punkte von $\alpha\mathcal{T}$ -Umgebungen U besitzen derart, daß U fremd ist zu allen $\mathcal{S}_r''\mathcal{T}$ für zu X_r hinreichend benachbarte X_r' (mit $X_r < X_r'$).

Anmerkung: Für die Anwendung von Postulat 5B kommen also nur Komplexe mit endlichem Ordnungswert in Betracht!

1.8.1. Für die weiteren Betrachtungen sind nützlich die folgenden Bezeichnungen:

1) Es sei α ein Komplex, der in dem offenen Teilbogen $\mathcal{T} \cap \mathcal{M}$ mindestens $k+1$ Punkte, darunter mindestens k S-Punkte besitzt. Insgesamt seien es t S-Punkte $X_1, \dots, X_t$ mit $k \leq t < \infty$. Die S-Punkte X_i seien natürlich angeordnet. $U_1, \dots, U_t$ seien beliebige, paarweise fremde Umgebungen der X_i . Auf $\alpha\mathcal{T}$ wenden wir eine "monotone Änderung A " an, d.h. es seien nach Postulat 5A etwa $X_{v_1}, \dots, X_{v_{k-1}}$ die "Fixpunkte", X_r einer der beweglichen Punkte, sowie V_r die nach diesem Postulat zu $U_1, \dots, U_t$ existierende Umgebung von X_r . Alle bei unserer monotonen Änderung auftretenden, zu α hinreichend benachbarten Komplexe können dann nach Postulat 5A durch die festen Punkte $X_{v_1}, \dots, X_{v_{k-1}}$ sowie durch einen geeigneten Punkt $X_r^* \in V_r$ definiert werden. Da $X_{v_1}, \dots, X_{v_{k-1}}$ im ganzen Verlauf der "Bewegung" festbleiben, kann X_r^* als "Parameter" dieses Prozesses mit dem Definitionsbereich V_r aufgefaßt werden.

Um die Überlegungen zu vereinfachen, wollen wir weiter annehmen, daß der Parameter X_r^* bei der betrachteten Änderung A sich streng monoton ändert. Wie eben erwähnt, gibt es dann zu jedem $X_r^* \in V_r$ bei festen $X_{v_1}, \dots, X_{v_{k-1}}$ eindeutig einen Komplex, den wir $\alpha(X_r^*)$ nennen wollen, und wie dieses $\alpha(X_r^*)$ sind auch die Teilbogen $c \subset \mathcal{T}$ von X_r^* abhängig, die von je 2 unmittelbar benachbarten¹⁾ beweglichen S-Punkten aus $\alpha(X_r^*)$ begrenzt werden bzw. von einem beweglichen S-Punkt aus $\alpha(X_r^*)$ und einem dazu unmittelbar benachbarten¹⁾ Endpunkt von $\mathcal{T}$. Ein solcher Teilbogen sei $\mathcal{T}(X_r^*)$. Bewegt sich nun bei der betrachteten monotonen Änderung A von α

¹⁾ 2 Punkte heißen unmittelbar benachbart (auf $\mathcal{T}$), wenn sie durch keine beweglichen S-Punkte (auf $\mathcal{T}$) getrennt sind.

der "Parameter" X_r^* (innerhalb V_r) (streng monoton) "nach rechts" und gilt $\mathcal{I}(X_r^*) \subset \mathcal{I}(X_r^{**})$ bzw. $\mathcal{I}(X_r^*) \supset \mathcal{I}(X_r^{**})$ für $X_r^* < X_r^{**}$, so nennen wir $\mathcal{I}(X_r^*)$ einen (im Verlaufe von A) "wachsenden" bzw. "abnehmenden" Teilbogen.

Auf ganz entsprechende Weise definieren wir "wachsende" bzw. "abnehmende" Teilbogen, wenn im Verlaufe von A der Parameter X_r^* sich (streng monoton) "nach links bewegt".

- 2) Es seien dieselben Bezeichnungen wie in 1) verwendet, nur sei der zugrunde gelegte Komplex $\mathcal{u}$ zusätzlich als von endlichem Ordnungswert vorausgesetzt.

$\mathcal{u}(X_r^0)$ sei ein Komplex, der im Verlaufe unserer auf $\mathcal{u}$ angewandten "monotonen Änderung" auftritt; mit den Bezeichnungen von 1) ist also $X_r^0 \in V_r$. Weiter sei angenommen, daß bei der betrachteten Änderung von $\mathcal{u}$ der "Parameter" X_r sich innerhalb V_r streng monoton "nach rechts bewegt".

$\tilde{X}$ sei ein Punkt aus $\mathcal{u}(X_r^0)\mathcal{I}$. Wir sagen nun: "In $\tilde{X}$ werden bei der betrachteten monotonen Änderung für $X_r = X_r^0$ Punkte gewonnen", wenn folgendes gilt: Zu jeder hinreichend kleinen Umgebung $U(\tilde{X}) \subset \mathcal{I}$ gibt es eine Umgebung $V(X_r^0) = V(X_r^0, U(\tilde{X})) \subset V_r$ des Punktes X_r^0 so, daß in jeder beliebigen Umgebung $W(X_r^0) \subset V(X_r^0)$ von X_r^0 mindestens ein Punkt X' mit $X' > X_r^0$ existiert von folgender Art: Für alle $X < X_r^0$ mit $X \in V(X_r^0)$ ist $0(\mathcal{u}(X)U(\tilde{X})) < 0(\mathcal{u}(X')U(\tilde{X}))$.

In analoger Weise wird sowohl der Gewinn von Punkten für den Fall, daß sich der "Parameter" X_r streng monoton "nach links bewegt", als auch der Verlust von Punkten erklärt.

1.8.2. Postulat V

Es seien für das System $\mathcal{M}$ die Postulate 1-5 erfüllt. Wenden wir auf einen Komplex $\mathcal{u} \in \mathcal{M}$ eine monotone Änderung nach Postulat 5A an, so werden (endlich oder unendlich viele) Punkte nur in abnehmenden Teilbogen gewonnen und zwar sollen im Falle eines Gewinnes von unendlich vielen Punkten unter diesen nur endlich viele S-Punkte sich befinden. (Endlich oder unendlich viele) T-Punkte, die zu Beginn der monotonen Änderung innerhalb eines zunehmenden Teilbogens vorhanden sind, gehen bei der monotonen Änderung "sofort" verloren.

Anmerkung : Postulat V wird im folgenden nur benötigt, wenn Komplexe α auftreten, die unendliche Ordnungswerte im Grundbogen $\mathcal{M}$ besitzen. Haben alle Komplexe aus $\mathcal{M}$ nur endlichen Ordnungswert in $\mathcal{M}$, so kann Postulat V aus den Postulaten 1-5 bewiesen werden.

1.9. Vorzeichen von Komplexen aus $\mathcal{M}$.

Postulat 6 :

Es sei $\mathcal{M}$ ein System, das den Postulaten 1 - 5 genügt, und α ein Komplex $\in \mathcal{M}$ mit $O(\alpha \mathcal{M}) \geq k+1$, so daß für α S- bzw. T-Punkte erklärt sind. $\mathcal{J} = \mathcal{J}$ sei ein echter Teilbogen von $\mathcal{M}$ mit $O(\alpha \mathcal{J}) \geq k$. Alle im folgenden auftretenden Komplexe sollen nur endlich viele S-Punkte, können aber eventuell unendlich viele T-Punkte besitzen.

- A) Hat α in $\mathcal{J}$ nur S-Punkte ($O(\alpha \mathcal{J})$ ist also endlich), so sei α "bezüglich $\mathcal{J}$ " ein "Vorzeichen" (+) oder (-) zugeordnet.
- B) Besitzt α in $\mathcal{J}$ nur S-Punkte, die in natürlicher Reihenfolge mit $X_1, \dots, X_t$ bezeichnet seien ($\alpha \mathcal{J} = (X_1, \dots, X_t)$), und ist $\mathcal{J}^*$ ein offener Teilbogen von $\mathcal{J}$ mit $O(\alpha \mathcal{J}^*) \geq k$ und X_r der unterste Punkt von $\alpha \mathcal{J}^*$ ($\alpha \mathcal{J}^* = (X_r, \dots)$), wobei $r \geq 1$, so gelte :
 α habe bezüglich $\mathcal{J}$ und bezüglich $\mathcal{J}^*$ gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen, je nachdem r ungerade oder gerade.
- C) Hat α in $\mathcal{J}$ nicht nur S-Punkte und ist der gemäß Postulat 2 in $\mathcal{J}$ existierende untere Endpunkt von $\alpha \mathcal{J}$ vom unteren Endpunkt von $\mathcal{J}$ verschieden, so soll gelten: Alle Komplexe β aus einer beliebigen, aber hinreichend kleinen Umgebung von α , die gemäß dem Reduktionssatz § 1.7.2. nur S-Punkte enthalten und deren unterste Punkte von $\beta \mathcal{J}$ oberhalb des unteren Endpunktes von $\mathcal{J}$ liegen, sollen gleiches Vorzeichen bezüglich $\mathcal{J}$ besitzen. Dieses Vorzeichen wird auch α bezüglich $\mathcal{J}$ zugeschrieben.
- D) Bei monotoner Änderung nach Postulat 5 bleibt das Vorzeichen erhalten, falls "über den unteren Endpunkt von $\mathcal{J}$ keine Punkte nach $\mathcal{J}$ herein- oder herausrücken". Genauer :
 Wenden wir auf α mit $\alpha \mathcal{J} = (X_1, \dots, X_t, \dots)$ das Monotonie-

postulat an, so haben alle $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, die im Verlaufe der auf $\mathcal{M}$ ausgeübten monotonen Änderung auftreten, bezüglich $\mathcal{T}$ dasselbe Vorzeichen wie $\mathcal{M}$ (bezüglich $\mathcal{T}$), wenn für diese $\mathcal{L}$ folgende Bedingung erfüllt ist : Es gibt eine Umgebung U_1 von X_1 mit $U_1 \subset \mathcal{T}$, so daß alle $\mathcal{L}$ unterhalb von U_1 keinen Punkt mit $\overline{\mathcal{T}}$ gemeinsam haben.

§ 2 Kontraktionsprozesse.

2.0. Es sollen Postulat 1 - 6 und V gelten. Betrachtet werden nur Komplexe $\mathcal{M}\mathcal{T}$ mit endlich vielen S-Punkten, die aber unendlich viele T-Punkte besitzen dürfen. Unter einem Kontraktionsprozeß wird verstanden eine abzählbare Anzahl hintereinander ausgeführter Operationen der folgenden Arten :

- 1) Durch eine (eventuell nicht monotone) beliebig kleine Änderung mit Hilfe des Reduktionssatzes (§1.7.2.) werden etwa vorhandene T-Punkte aus dem jeweils betrachteten $\mathcal{M}\mathcal{T}$ eliminiert.
- 2) Enthält $\mathcal{M}\mathcal{T}$ nur endlich viele, aber mindestens $(k+1)$ Punkte und zwar lauter S-Punkte, so werden von den $k+1$ kleinsten dieser S-Punkte $k-1$ festgehalten und die beiden noch übrigen, etwa X', X'' , (gemäß Postulat 5) einander monoton genähert. Falls keine Gewinne erfolgen, wird diese monotone Kontraktion solange fortgesetzt, bis 2 der $k+1$ Punkte von einander einen positiven Abstand haben, der kleiner ist als eine jeweils vorgeschriebene positive Zahl.
- 3) Eine Operation 2), bei der 2 Punkte einander hinreichend nahe gekommen sind, wird abgebrochen und Operation 2) für andere bewegliche Punkte unter den betrachteten $k + 1$ ausgeübt.

2.1. Der Kontraktionssatz .

Der Kontraktionssatz besagt - kurz formuliert - : Sind $X_1, \dots, X_{k+1}$ die $k+1$ kleinsten S-Punkte, die ein Komplex $\mathcal{M}$ mit einem geeigneten Teilbogen $\mathcal{T}$ des Grundbogens $\mathcal{M}$ gemeinsam hat, so können wir unter Beibehaltung des Vorzeichens dieses

$(k+1)$ -tupel durch Anwendung eines Kontraktionsprozesses in ein $(k+1)$ -tupel beliebig kleiner Spannweite zusammenziehen, das aus den $k+1$ kleinsten, in $\mathcal{J}$ liegenden Punkten eines Komplexes $\mathcal{L}$ besteht.

Genauer :

- Vor. 1) $\mathcal{M}$ sei ein Grundbogen; für das System $\mathcal{M}$, das nach § 1.2. auf $\mathcal{M}$ definiert sei, seien die Postulate 1 - 6 sowie V erfüllt.
- 2) $\mathcal{M}$ habe mit jedem in Betracht zu ziehenden Komplex nur endlich viele S-Punkte gemeinsam (eventuell aber unendlich viele T-Punkte).
- 3) $\mathcal{J} = \mathcal{J}$ sei ein echter Teilbogen von $\mathcal{M}$ mit $\bar{\mathcal{J}} \subset \mathcal{M}$; ferner sei $\mathcal{a}$ ein Komplex von $\mathcal{M}$ mit $k+1 \leq \mathcal{O}(\mathcal{a} \cap \mathcal{J}) < \infty$: $\mathcal{a} \cap \mathcal{J} = (P_1, \dots, P_t)$ ($t \geq k+1$). Die Punkte P_t seien natürlich angeordnet und sämtlich S-Punkte in $\mathcal{a}$. P_1 sei auch unterster Punkt von $\mathcal{a} \cap \bar{\mathcal{J}}$.

Beh. Es existiert ein Kontraktionsprozeß K , der auf $\mathcal{a}$ ausgeübt wird, sowie dazu ein Punkt $Q \in (P_1, P_{k+1})$ so, daß es zu jeder Umgebung $U(Q) \subset \mathcal{J}$ einen Komplex $\mathcal{L} \in \mathcal{M}$ gibt von folgenden Eigenschaften:

- 1) es "entsteht" $\mathcal{L}$ aus $\mathcal{a}$ durch den Kontraktionsprozeß K ;
- 2) es enthält $\mathcal{L} \cap \bar{\mathcal{J}}$ nur S-Punkte (in $\mathcal{L}$);
- 3) die in $\bar{\mathcal{J}}$ liegenden $k+1$ kleinsten Punkte von $\mathcal{L}$ liegen in $U(Q) \subset \mathcal{J}$;
- 4) es besitzt $\mathcal{L}$ bezüglich $\mathcal{J}$ das gleiche Vorzeichen wie $\mathcal{a}$ bezüglich $\mathcal{J}$.

Zu Teil II und III.

Mit Hilfe der im vorstehenden angegebenen, im I. Teil eingeführten Begriffe und Postulate sowie des (Reduktions- und) Kontraktionssatzes lassen sich jetzt ohne wesentliche neue Schwierigkeiten die Sätze von Böhmer, Mohrmann und Mukhopadhyaya als Sätze über Korrespondenzen formulieren und beweisen.

Literaturverzeichnis

- (1) Haupt, O., Sur quelques problèmes de la théorie des ordres géométriques.
Colloque sur les questions de réalité en géométrie.
Liège 1955 (Centre Belge de Recherches Mathématiques)
vgl. auch die dortigen Literaturnachweise.
- (2) Haupt, O., "Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven in der Ebene bezüglich vorgegebener Kurvenscharen".
Monatshefte f. Mathem. u. Physik, 40 (1933) S. 1 ff.
- (3) Haupt, O., "Über Verallgemeinerungen des Böhmerschen und verwandter Ovalsätze".
Abh. math. Seminar d. Univ. Hamburg, 15 (1943) S. 130 ff.
- (4) Haupt, O., "Über eine Beziehung zwischen Ordnung und Singularitäten". Math. Nachrichten, 4 (1950) S. 81 ff.
- (5) Haupt, O., "Über Bogen mit lauter gleichartigen Schmiegebilden".
Portugaliae Mathematica, 13 (1954) S. 1 ff.
- (6) Böhmer, P., "Über elliptisch-konvexe Ovale".
Math. Ann., 60 (1905) S. 256 ff.
- (7) Mohrmann, H., "Beständig gleichartig gekrümmte Kurven".
Math. Ann., 72 (1912) S. 285 ff und
"Über beständig hyperbolisch gekrümmte Kurvenstücke".
ebenda S. 593 ff.
- (8) Mukhopadhyaya, S., "Generalized form of Böhmer's theorem for an elliptically curled non-analytic oval"
Math. Zeitschr. 30 (1929) S. 560 ff.
- (9) Haupt, O., "Über den Ovalsatz von Böhmer-Mukhopadhyaya"
Math. Ann., 118 (1943) S. 629 ff.
- (10) Haupt, O., "Bestimmung der zyklisch ordnungshomogenen ebenen Bogen" 2. Mitt. Journ. f. d. r. u. angew. Math., 180 (1939) S. 50 ff.
- (11) Juel, C., Danske Vid. Selsk. Skr., Naturv. Afd., 7.R.,
XI,2 (1914) 113 ff.
- (12) Linsman, M., Introduction à une théorie abstraite de la notion de l'ordre des figures réelles ; Mémoires publ. par l'Académie royale de Belgique, Classe des sciences, 17, 1938.

Lebenslauf.

Ich, Georg Schmerler, bin geboren am 8. Juli 1929 in Fürth i/Bay. als Sohn des städt. Bauoberamtmanns Friedrich Schmerler und seiner Ehefrau Anna Margarete geb. Gailer. Von 1936 bis 1940 besuchte ich die Volksschule in Fürth, von 1940-1946 das Gymnasium in Fürth, von 1946-1948 das Melanchthon-Gymnasium in Nürnberg, wo ich im Juni 1948 die Reifeprüfung ablegte.

Mein Studium begann ich im Wintersemester 1948/49 an der philosophisch-theologischen Hochschule Bamberg; vom Sommersemester 1949 bis Sommersemester 1952 studierte ich an der Universität Erlangen mit dem Ziel, die Prüfung für das höhere Lehramt in Mathematik und Physik abzulegen. Im Wintersemester 1955/56 und Sommersemester 1956 nahm ich als Gasthörer an philosophischen Seminaren teil. Meine akademischen Lehrer waren in diesen Jahren die Herren Professoren und Dozenten: Armsen, Arnold, Haupt, Hilsch, Kamlah, Kappos, Künneth, Mollwo, Noddack, Nöbeling, Pfeil, Pummerer, Seiler, Specht, Volz, Zocher. Ihnen allen darf ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen. Ganz besonders möchte ich Herrn Prof. Dr. Haupt danken, von dem die Anregung für die vorliegende Arbeit stammt und der mir in wiederholten Rücksprachen wertvollste Ratschläge erteilte.

Im Herbst 1950 unterzog ich mich der Vorprüfung, im Herbst 1952 der Wissenschaftlichen Prüfung für das Lehramt der Mathematik und Physik an höheren Schulen. Beide Prüfungen fanden in Erlangen statt.

Vom November 1952 bis Juli 1953 besuchte ich das pädagogische Seminar an der Dürer - Oberrealschule Nürnberg, wo ich im Juni 1953 die Pädagogische Prüfung für das höhere Lehramt ablegte.

Seit 1. August 1953 bin ich, anfangs als Lehramtsassessor, seit 1. Oktober 1954 als Studienassessor am Gymnasium Ansbach tätig.

